E.N.S.I.

Option M 1984

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N.B. — *La partie* III *n'utilise que les résultats de la partie* I *et n'intervient pas dans la partie* IV.

NOTATIONS

1° Dans tout le problème K désigne un corps commutatif, E un espace vectoriel sur K de dimension finie ($\dim_K E = n$) supérieure ou égale à 2, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E, I_E l'élément de $\mathcal{L}(E)$ défini par $I_E(x) = x \quad \forall x \in E$, et $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties de E c'est-à-dire $\mathcal{H} = \{ \lambda . I_E \ ; \ \lambda \in K \}$.

2° Pour un endomorphisme u de E, on note :

- $u^0 = I_E$ et $u^p = u \circ u^{p-1}$ pour tout entier p; $p \geq 1$.
- $C(u)$ (appelé commutant de u), la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes v de E commutants avec u, c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$.
- Π_u le polynôme caractéristique de u.
- pour tout polynôme P de K[X] défini par $P(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$, $P(u)$ désigne l'endomorphisme de E défini par $P(u) = \sum_{k=0}^{N} a_k u^k$ (on notera que $P(u)$ est un élément de $C(u)$).
- pour tout vecteur x de E, $E_u(x)$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $\{ u^p(x) \ ; \ p \in \mathbb{N} \}$.
- un endomorphisme u de E est dit cyclique s'il existe un vecteur x de E tel que $E_u(x) = E$.

3° Si $\mathcal{A}$ est une partie non vide de $\mathcal{L}(E)$, on note :

$$C(\mathcal{A}) = \{ v \in \mathcal{L}(E) \ / \ v \circ u = u \circ v \qquad \forall u \in \mathcal{A} \}$$

Enfin pour une matrice A de l'algèbre $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K, on note $C(A) = \{ B \in \mathcal{M}_n(K) \ / \ A.B = B.A \}$ (appelé commutant de la matrice A).

Les candidats pourront admettre et utiliser les résultats suivants :

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E ; pour un endomorphisme u de E soit $M(u, \mathcal{B})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

   Alors, un endomorphisme v appartient au commutant de u si et seulement si $M(v, \mathcal{B})$ appartient au commutant de $M(u, \mathcal{B})$ et l'application $v \longrightarrow M(v, \mathcal{B})$ est un isomorphisme entre ces deux algèbres.

2. Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in K^n$; le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

noté $V(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

.../...

est nul si et seulement s'il existe un couple (i, j) tel que :

$$1 \leqslant i \leqslant n$$
$$1 \leqslant j \leqslant n \quad \text{et} \quad \lambda_i = \lambda_j$$
$$i \neq j$$

Partie I

1° Soit x un vecteur E et u un endomorphisme de E.

a. Montrer que $E_u(x)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E, contenant x et stable par u.

b. Soit $x \neq 0$; on pose $\dim_K E_u(x) = k$. Montrer que $k \geqslant 1$ et que $\{ u^i(x) ; 0 \leqslant i \leqslant k-1 \}$ est une base de $E_u(x)$.

c. Caractériser au moyen de la dimension de $E_u(x)$ les vecteurs propres x de u.

2° On suppose que u est un endomorphisme cyclique. Soit alors $x_0 \in E$ tel que $\{ u^i(x_0) ; 0 \leqslant i \leqslant n-1 \}$ soit une base de E.

a. Montrer que $\{ u^i ; 0 \leqslant i \leqslant n-1 \}$ est une partie libre de $\mathcal{L}(E)$.

b. Soient v et w deux éléments de $C(u)$. Montrer que $v = w$ si et seulement si $v(x_0) = w(x_0)$.

c. Montrer que $\{ u^i ; 0 \leqslant i \leqslant n-1 \}$ est une base de $C(u)$.

d. On pose $u^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)$ où $a_k \in K$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

- Calculer le polynôme caractéristique Π_u de u à l'aide des coefficients $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$.
- En déduire que $\Pi_u(u) = 0$.

3° Dans cette question u est un endomorphisme quelconque de E.

a. Soit F un sous-espace de E stable par u et soit v l'endomorphisme de F induit par u (c'est-à-dire tel que : $\forall x \in F \quad v(x) = u(x)$).

Montrer que Π_v divise Π_u. En déduire que $\ker \Pi_v(u)$ est inclus dans $\ker \Pi_u(u)$.

b. Soit $x \in E \quad x \neq 0$. Montrer que u induit sur le sous-espace $E_u(x)$, un endomorphisme cyclique de $E_u(x)$. En déduire que $\Pi_u(u)(x) = 0$.

c. Montrer que $\Pi_u(u)$ est l'endomorphisme nul.

4° *a.* Soit u un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E \quad \dim_K E_u(x) \leqslant 1$.

Montrer que u est une homothétie de E.

b. *Application* : Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{L}(E)$ satisfaisant la propriété :

$\forall x \in E \quad x \neq 0 \quad \exists f \in \mathcal{A} \; \exists \alpha \in K$ tel que $\operatorname{Ker}(f - \alpha I_E) = K.x$

(où $K.x$ désigne la droite vectorielle engendrée par x).

Montrer que $C(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$.

c. En déduire que $C(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ dans les deux cas suivants :

1. $\mathcal{A} = GL(E)$ (ensemble des automorphismes de E). (On pourra éventuellement distinguer le cas où K est de caractéristique 2.)

2. $K = R$; E est un espace euclidien et $\mathcal{A}$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

Partie II

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E. $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ les valeurs propres distinctes de u dans K et $(r_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ leur ordre de multiplicité.

1° On suppose que $p = n$, c'est-à-dire que u a n valeurs propres distinctes dans K.

Montrer que u est cyclique.

2° Dans cette question, on suppose u diagonalisable.

a. Montrer que v appartient à $C(u)$ si et seulement si v laisse stable tous les sous-espaces propres de u.

b. En déduire que $\dim_K C(u) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2$.

c. Montrer que $(u - \lambda_1 I_E) \circ (u - \lambda_2 I_E) \ldots \circ (u - \lambda_p I_E) = 0$.

En déduire que si $\{ I_E, u, \ldots u^{n-1} \}$ est une famille libre, u a n valeurs propres dans K deux à deux distinctes.

d. Déduire des résultats précédents que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(α) u est cyclique;

(β) $\{ I_E, u, \ldots u^{n-1} \}$ est une famille libre;

(γ) u admet n valeurs propres dans K deux à deux distinctes;

(δ) $\dim_K C(u) = n$.

3° Dans cette question, on suppose u cyclique.

a. Montrer, en utilisant une base convenable, que $\forall \lambda \in K$ rang $(u - \lambda I_E) \geqslant n - 1$.

b. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si u admet n valeurs propres dans K deux à deux distinctes.

4° *Application* (cette question n'utilise que les résultats de 2°*b*.).

Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre k ($k \geqslant 2$) $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant k}}$ telles que :

$$\forall i = 1, 2, \ldots k \qquad \forall j = 1, 2, \ldots k \qquad \sum_{i=1}^{k} a_{ij} = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}$$

(on note $\alpha(A)$ la valeur commune des sommes ci-dessus.)

Soit J l'élément de $\mathfrak{M}$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

a. Montrer que $\mathfrak{M}$ est le commutant de J et que α est une forme linéaire sur $\mathfrak{M}$.

b. Déterminer les ordres de multiplicité des valeurs propres de J. Donner $\dim_R \mathfrak{M}$.

c. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant k}} \in \mathfrak{M}$. On pose $\beta(A) = \sum_{i=1}^{k} a_{ii}$.

Montrer que $\mathfrak{M}_0 = \{ A \in \mathfrak{M} / \alpha(A) = \beta(A) \}$ est un espace vectoriel et calculer sa dimension.

Partie III

Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'ordre p ($p \geqslant 2$) c'est-à-dire tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

1° *a.* Montrer que pour tout vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$, la famille de vecteurs $\{ u^i(x) ; 0 \leqslant i \leqslant p - 1 \}$ est une partie libre de E.

b. En déduire que p est inférieur ou égal à n et que u est cyclique si et seulement si $p = n$.

.../...

2° *Application :* pour tout entier $k \geqslant 0$ on désigne par $R_k[X]$, l'espace vectoriel sur R des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à k.

Soit Δ l'endomorphisme de $R_k[X]$ défini (pour $k \geqslant 1$) par :

$$\forall P \in R_k[X] \qquad \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

a. Déterminer $\ker \Delta$. En déduire que $I_m \Delta = R_{k-1}[X]$. Montrer que Δ est cyclique.

b. Soit D l'endomorphisme de $R_k[X]$ qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P'.
Montrer que D est un élément de $C(\Delta)$.

c. La question (I, 2°, *c.*) permet de définir des réels $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant k}$ tels que $D = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \Delta^i$ et ce de façon unique.

Déterminer ces réels lorsque $k = 1$; $k = 2$ et $k = 3$.

Partie IV

Dans toute cette partie $K = R$ et $\dim_R E = 2$. On désignera par $\mathfrak{P}$ un espace affine réel de dimension 2 associé à l'espace vectoriel E.

A. Soit u un endomorphisme de E satisfaisant :

$$u^p = I_E \text{ avec } p > 2 \qquad \text{et} \qquad u^q \neq I_E \text{ pour } 1 \leqslant q \leqslant p-1$$

1° u peut-il être une homothétie? Montrer que u est cyclique.

2° *a.* Montrer que le reste de la division euclidienne du polynôme $X^p - 1$ par le polynôme caractéristique Π_u de u est nul (on pourra utiliser les résultats de I.3°).

b. En déduire que les racines du polynôme Π_u sont : $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ où θ est un élément de l'ensemble $\left\{ \frac{2k\pi}{p} ;\ 1 \leqslant k \leqslant p-1 ;\ k \text{ et } p \text{ premiers entre eux} \right\}$.

3° Soit e_1 un vecteur non nul de E et soit $e_2 = u(e_1)$.

a. Montrer que (e_1, e_2) est une base de E et que la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix} \qquad (\theta \text{ étant défini en } 2°)$$

b. Montrer qu'il existe une forme bilinéaire symétrique unique φ sur E, satisfaisant :

$$\begin{cases} \varphi(e_1, e_1) = 1 \\ \varphi(u(X), u(Y)) = \varphi(X, Y) \qquad \forall X \in E \qquad \forall Y \in E \end{cases}$$

Donner la matrice de φ dans la base (e_1, e_2).

c. Montrer que φ est un produit scalaire sur E. Quelle est l'interprétation de u dans cette structure euclidienne?

B. Soit f une application affine de $\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{P}$ satisfaisant la propriété suivante :

Il existe p points de $\mathfrak{P}$ ($p > 2$), $A_1, A_2, \ldots, A_p$ avec $A_2, \ldots, A_p$ distincts de A_1 tels que :

$$f(A_1) = A_2,\ f(A_2) = A_3 \ldots f(A_{p-1}) = A_p \quad \text{et} \quad f(A_p) = A_1$$

1° *a.* Montrer que les points $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont deux à deux distincts.

b. Montrer que f a au moins un point fixe.

c. Montrer que $f^p = I_{\mathfrak{P}}$ (application identique sur $\mathfrak{P}$) et que l'application linéaire associée à f, notée u, satisfait les conditions définies en tête de A.

d. Montrer que f a un point fixe unique G.

2° Montrer que les points $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ appartiennent à une ellipse de $\mathfrak{P}$, de centre G et globalement invariante par f.